Φυλλάδιο 3 (Απειροστικός λογισμός ΙΙ)

1. Δίνεται $f:[0,1]\to R$ φραγμένη ώστε για κάθε $b\in(0,1]$ η f να είναι ολοκληρώσιμη στο $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.
2. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f:[0,1]\to R$ ολοκληρώσιμη που δεν λαμβάνει μέγιστη τιμή.
3. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $f:[a,b]\to R$, ώστε η $|f|$ να είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, ενώ η f να μην είναι ολοκληρώσιμη στο ίδιο διάστημα.
4. Δείξτε ότι αν $f:[a,b]\to R$ φραγμένη συνάρτηση, ώστε $U(f,P)=L(f,P)$ για κάθε διαμέριση P του $[a,b]$, τότε η f είναι σταθερή συνάρτηση.
5. Δείξτε ότι για μία φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to R$ η ύπαρξη διαμέρισης P του $[a,b]$, ώστε $U(f,P)=L(f,P)$ συνεπάγεται ότι η η f είναι σταθερή.
6. Δίνεται $f:[0,1]\to R$ ολοκληρώσιμη, ώστε $f(x)=0$ για κάθε $x\in[0,1]\cap Q$. Δείξτε ότι $\int_0^1 f=0$.
7. Δίνεται η συνάρτηση $f:[-1,1]\to R$ ώστε $f(x)=\sin(\frac{1}{x})$ αν $x\neq 0$ Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[-1,1]$.
8. Δείξτε ότι κάθε $f:[a,b]\to R$ φραγμένη συνάρτηση με πεπερασμένο το πλήθος σημεία ασυνέχειας είναι ολοκληρώσιμη.
9. Δείξτε ότι αν $f:[0,2]\to R$ δίνεται από τον τύπο

$$f(x)=1, x=\frac{1}{k}, k\in N$$

$$=0, x\notin\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\}$$, τότε η η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,2]$.

10. Δείξτε ότι αν $f:[a,b]\to R$ συνεχής συνάρτηση, ώστε $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[a,b]$ και επιπλέον $\int_a^b f=0$, τότε η f είναι η μηδενική συνάρτηση.
11. Δείξτε ότι αν $f,g:[a,b]\to R$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τότε ισχύει η εξής ανισότητα, γνωστή ώς Cauchy-Schwartz:

$$\left[\int_a^b fg\right]^2 \leq \left[\int_a^b f^2\right]\left[\int_a^b g^2\right].$$

12. . Δείξτε ότι αν $f:[0,+\infty)\to R$ συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχει το όριο $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ και ισούται με $f(0)$.
13. Δείξτε ότι η ακολουθία $\gamma_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\int_1^n\frac{dx}{x}$, $n\in N$ είναι φθίνουσα και θετικών όρων, άρα συγκλίνουσα.